

# A lei dos co-senos

## Introdução

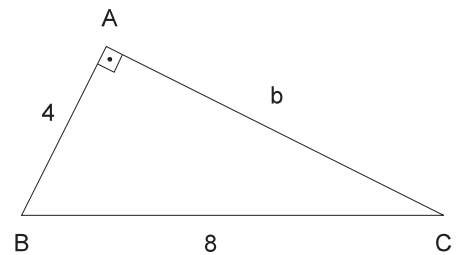
Utilizando as razões trigonométricas nos triângulos retângulos, podemos resolver vários problemas envolvendo ângulos e lados. Esse tipo de problema é conhecido como resolução de triângulos. Conhecendo dois elementos de um triângulo retângulo, quase sempre podemos determinar os outros elementos, como veremos nos exemplos a seguir:

Conhecendo dois lados, e usando o Teorema de Pitágoras, determinamos a medida do terceiro lado:

$$b^2 = 8^2 - 4^2$$

$$b = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48}$$

$$b = 4\sqrt{3} \text{ @ } 6,92$$



Usando as razões trigonométricas e consultando a tabela trigonométrica, determinamos os ângulos agudos.

$$\cos \bar{B} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \bar{B} = 60^\circ$$

$$\bar{C} = 90^\circ - \bar{B} \Rightarrow \bar{C} = 30^\circ$$

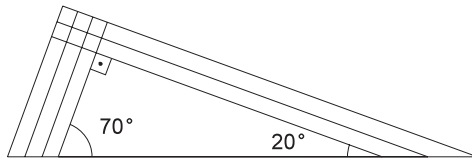
Se conhecermos um lado e um ângulo, poderemos determinar os outros dois lados:

$$\operatorname{sen} 50^\circ = \frac{6}{a} \quad \text{e} \quad a = \frac{6}{\operatorname{sen} 50^\circ} = \frac{6}{0,766} \approx 7,83$$

$$\operatorname{tg} 50^\circ = \frac{6}{c} \quad \text{e} \quad c = \frac{6}{\operatorname{tg} 50^\circ} = \frac{6}{1,192} \approx 5,03$$

Sabendo que os ângulos agudos são complementares, determinamos o outro ângulo:  $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B}$  e  $\hat{C} = 40^\circ$

Conhecendo os dois ângulos agudos, podemos construir vários triângulos semelhantes (com os mesmos ângulos). Portanto, essa é a única situação indeterminada na resolução de triângulos retângulos.



### A hipotenusa unitária

Vimos nas aulas anteriores que as razões trigonométricas de um ângulo agudo não dependem do triângulo retângulo escolhido. Na figura abaixo temos:

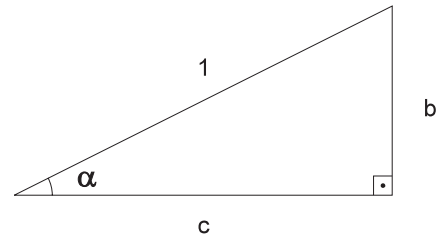
$$\operatorname{sen} a = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\operatorname{cos} a = \frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2} = \frac{c_3}{a_3} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

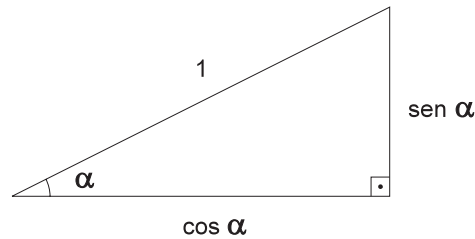
Observamos que, para o cálculo do seno e do co-seno de um ângulo, dividimos um dos catetos pela hipotenusa do triângulo retângulo correspondente. Já que podemos obter esse valor com qualquer um dos triângulos semelhantes, é muito prático trabalharmos com um triângulo retângulo cuja hipotenusa seja igual a 1.

$$\text{sen } \alpha = \frac{b}{1} = b$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{c}{1} = c$$

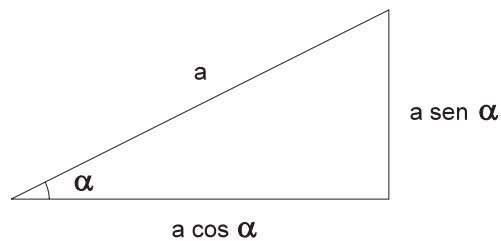


Apenas nesse caso, em que a hipotenusa do triângulo retângulo é igual a 1, podemos obter a medida dos catetos conhecendo seus ângulos agudos.

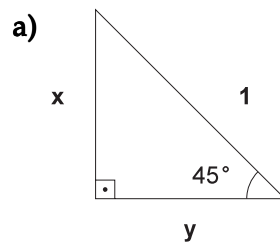


### Observação

Para uma hipotenusa qualquer teríamos:

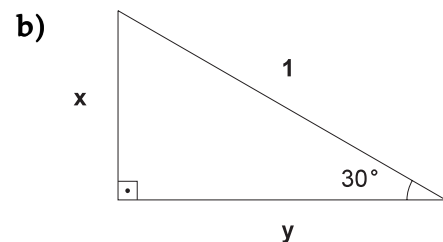


Veja, nos triângulos retângulos abaixo, a medida dos catetos:



$$x = \text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y = \text{cos } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$x = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$y = \text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} @ 0,866$$

## A variação do seno e do co-seno

Na figura a seguir, temos uma circunferência cujo raio é igual a 1 dm (um decímetro). Para vários ângulos diferentes, podemos obter os valores do seno e do co-seno (em decímetros) apenas medindo os catetos dos triângulos formados.

$$\begin{array}{ll} BP = \text{sen } \hat{A}OP & OB = \text{cos } \hat{A}OP \\ CQ = \text{sen } \hat{A}OQ & OC = \text{cos } \hat{A}OQ \\ DR = \text{sen } \hat{A}OR & OD = \text{cos } \hat{A}OR \end{array}$$

e assim por diante...

A partir dessa figura, podemos concluir que:

- I) Quanto maior o ângulo, maior a medida do cateto oposto (ou seja, maior o valor do seno).
- II) Quanto maior o ângulo, menor a medida do cateto adjacente (ou seja, menor o valor do co-seno).

## Senos e co-senos de ângulos obtusos

Para obtermos um ângulo  $\alpha$  obtuso (maior que  $90^\circ$ ), desenhemos um triângulo retângulo (semelhante aos que desenhemos para os ângulos agudos do item anterior) e, como estamos considerando a hipotenusa igual a um (1 dm), definimos que:

$$\text{sen } \alpha = \text{HM} \quad \text{e} \quad \text{cos } \alpha = \text{OH}$$

Note que o seno do ângulo obtuso  $\alpha$  é igual ao seno do ângulo agudo  $180^\circ - \alpha$  e que o co-seno do ângulo  $\alpha$  é do mesmo comprimento que o co-seno de  $180^\circ - \alpha$ . Entretanto, como está do "outro lado" em relação ao centro do círculo, terá sinal negativo.

$$\begin{aligned} \text{Resumindo:} \quad \text{sen } \alpha &= \text{sen } (180^\circ - \alpha) \\ \text{cos } \alpha &= -\text{cos } (180^\circ - \alpha) \end{aligned}$$

Veja alguns exemplos:

**a)**  $30^\circ + 150^\circ = 180^\circ$

$$\text{sen } 150^\circ = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{cos } 150^\circ = -\text{cos } 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

**b)**  $80^\circ + 100^\circ = 180^\circ$

$$\text{sen } 100^\circ = \text{sen } 80^\circ = 0,98481$$

$$\text{cos } 100^\circ = -\text{cos } 80^\circ = -0,17365$$

**c)**  $45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$

$$\text{sen } 135^\circ = \text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{cos } 135^\circ = -\text{cos } 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Veja agora a relação entre lados e ângulos de um triângulo não-retângulo (acutângulo ou obtusângulo).

### O triângulo acutângulo

No triângulo acutângulo ABC (que tem três ângulos agudos), traçamos uma de suas alturas e obtemos dois triângulos retângulos:

o triângulo ABH e o triângulo ACH.

Chamando de  $x$  a medida de BH, a base BC do triângulo ABC fica dividida em dois segmentos de medidas  $x$  e  $a - x$ .

Usando o Teorema de Pitágoras em cada um dos triângulos retângulos, temos:

$$1^\circ \text{ triângulo: } b^2 = h^2 + (a - x)^2$$

$$2^\circ \text{ triângulo: } c^2 = h^2 + x^2$$

Subtraindo essas duas equações:

$$b^2 - c^2 = (a - x)^2 - x^2$$

$$b^2 - c^2 = a^2 - 2ax + x^2 - x^2$$

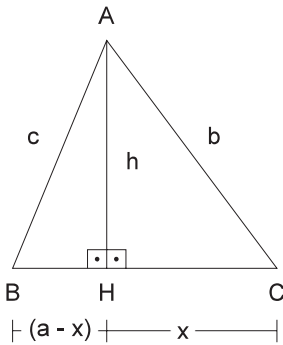
$$b^2 - c^2 = a^2 - 2ax$$

Sabendo que:  $\cos \hat{B} = \frac{x}{c}$   $\Rightarrow x = c \cdot \cos \hat{B}$ , efetuamos a substituição:

$$b^2 - c^2 = a^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

Logo, 
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

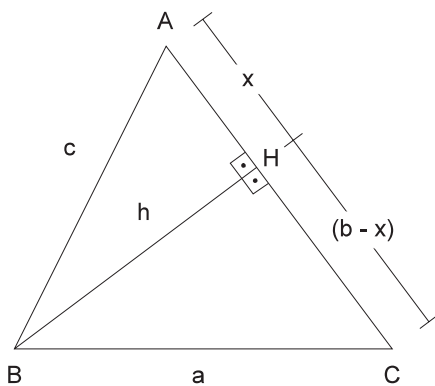
Da mesma forma, podemos achar  $c$ , conhecendo a medida dos dois outros lados e seu ângulo oposto. Para isso, fazemos HC medindo  $x$  e BH medindo  $a - x$ .



$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (a - x)^2 \\ - b^2 &= h^2 + x^2 \\ \hline c^2 - b^2 &= (a - x)^2 - x^2 \\ c^2 - b^2 &= a^2 - 2ax \end{aligned}$$

Como  $x$  agora é igual a  $b \cos \hat{C}$ , temos: 
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

Para obter uma expressão para o cálculo de  $a$ , podemos traçar outra altura  $h$  do triângulo ABC, relativa ao lado AC.



$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + (b - x)^2 \\ - c^2 &= h^2 + x^2 \\ \hline a^2 - c^2 &= (b - x)^2 - x^2 \\ a^2 - c^2 &= b^2 - 2bx \quad \text{e} \quad x = c \cdot \cos \hat{A} \end{aligned}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

### Resumindo:

Num triângulo acutângulo, valem as relações:

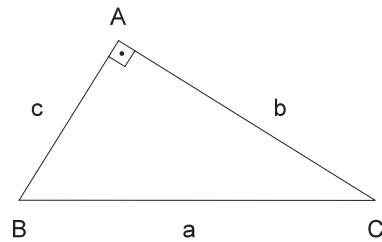
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \end{aligned}$$

### Para você saber mais

Ao transformar um triângulo retângulo num triângulo acutângulo, o ângulo reto diminui e, conseqüentemente, o lado oposto também diminui.

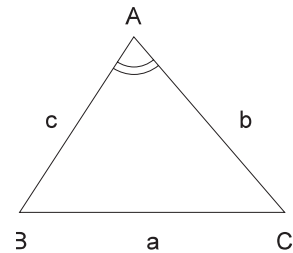
Observe as figuras:

Triângulo retângulo



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Triângulo acutângulo



$$\begin{aligned} a^2 &< b^2 + c^2 \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \end{aligned}$$

### O triângulo obtusângulo

Veja o que ocorre quando um triângulo retângulo se transforma num triângulo obtusângulo:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 > b^2 + c^2$$

Procedendo como no caso do triângulo acutângulo, descobriremos de quanto a soma  $b^2 + c^2$  precisa ser acrescida para se igualar a  $a^2$ .

A fim de facilitar a visualização, vamos girar o triângulo obtusângulo, colocando o lado AC como base:

Traçando a altura relativa ao lado AC, formamos um novo segmento AH, que mede  $x$  e dois triângulos retângulos: triângulo BHA e triângulo BHC.

Usando o Teorema de Pitágoras nos triângulos BHA e BHC e subtraindo as equações obtidas, temos:

$$\begin{array}{r}
 a^2 = h^2 + (b+x)^2 \\
 - \quad c^2 = h^2 + x^2 \\
 \hline
 a^2 - c^2 = (b+x)^2 - x^2 \\
 a^2 - c^2 = b^2 + 2bx \qquad \rightarrow \qquad a^2 = b^2 + c^2 + 2bx
 \end{array}$$

No triângulo retângulo triângulo BHA, temos  $\cos(180^\circ - \hat{A}) = \frac{x}{c}$

$$\begin{aligned}
 \text{logo } x &= c \cos(180^\circ - \hat{A}) \\
 \cos(180^\circ - \hat{A}) &= -\cos \hat{A} \\
 x &= -c \cos \hat{A}
 \end{aligned}$$

Substituindo  $x$  na equação:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2b(-c \cdot \cos \hat{A}) \quad \text{ou}$$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$
--------------------------------------

Assim, concluímos que as expressões obtidas para triângulos acutângulos são válidas para triângulos obtusângulos.



## EXEMPLO 1

Uma pessoa viajou de A para C passando por B. De A até B, percorreu 25 km e de B até C, 42 km. Os percursos AB e BC formam entre si um ângulo de  $150^\circ$ . Se fosse possível ir em linha reta de A para C, qual seria a economia de quilometragem?

**Solução:**

$$x^2 = 25^2 + 42^2 - 2 \cdot 25 \cdot 42 \cdot \cos 150^\circ$$

$$x^2 = 625 + 1764 - 2 \cdot 1050 (-\cos 30^\circ)$$

$$x^2 = 2389 + 2100 \cdot 0,866$$

$$x^2 = 2389 + 1818,6$$

$$x^2 = 4207,6$$

$$x \approx 65 \text{ km}$$

Indo de A para C, passando por B, gasta-se  $25 + 42 = 67$  km; e de A para C em linha reta, aproximadamente, 65 km. Desse modo, a economia de quilometragem seria de 2 km.

## EXEMPLO 2

Se o ângulo entre as direções AB e BC fosse menor, o caminho direto seria mais vantajoso?

**Solução:**

Vejamos, como exemplo, duas situações:

a) Se o ângulo for reto:

$$x^2 = 25^2 + 42^2$$

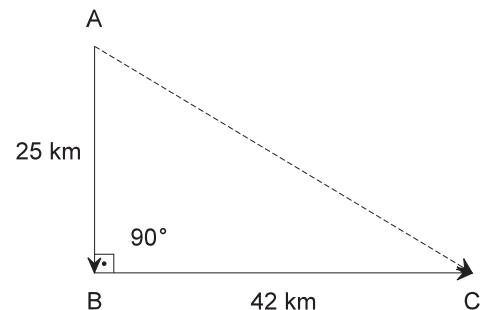
$$x^2 = 625 + 1764$$

$$x^2 = 2389$$

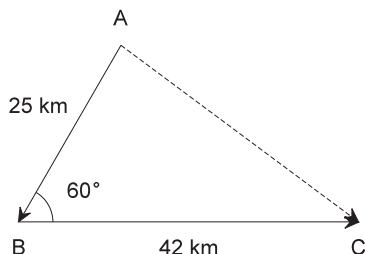
$$x \approx 49 \text{ km}$$

$$67 \text{ km} - 49 \text{ km} = 18 \text{ km}$$

Seriam economizados 18 km.



b) Se o ângulo for agudo igual a  $60^\circ$ :



$$x^2 = 25^2 + 42^2 - 2 \cdot 25 \cdot 42 \cdot \cos 60^\circ$$

$$x^2 = 625 + 1764 - 2 \cdot 100 \cdot \frac{1}{2}$$

$$x^2 = 1239$$

$$x \approx 35 \text{ km}$$

$$67 \text{ km} - 35 \text{ km} = 32 \text{ km}$$

Seriam economizados 32 km.

Quanto menor o ângulo entre AB e BC, melhor seria ir direto de A para C, pois essas cidades seriam mais próximas e a diferença entre os dois percursos aumentaria.

### Exercício 1

Dados os seguintes elementos de um triângulo ABC:  $\hat{A} = 30^\circ$ ,  $AB = 8 \text{ m}$ ,  $CB = 5 \text{ m}$ . Calcule AC.

### Exercícios

### Exercício 2

Os lados de um triângulo medem 5 cm, 7 cm e 10 cm.

- Classifique esse triângulo quanto aos ângulos.
- Obtenha o valor aproximado do maior ângulo do triângulo.

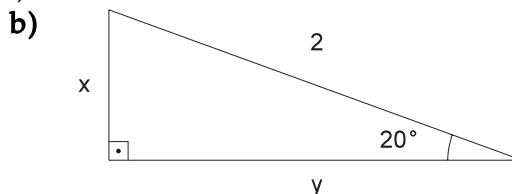
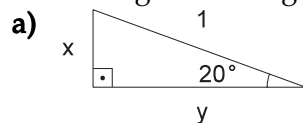
### Exercício 3

Determine:

- $\sin 120^\circ$
- $\cos 120^\circ$
- $\sin 95^\circ$
- $\cos 95^\circ$

### Exercício 4

Nos triângulos retângulos abaixo, determine as medidas dos catetos.



### Exercício 5

Complete com = , > ou <.

- $\sin 30^\circ$  .....  $\sin 45^\circ$
- $\cos 30^\circ$  .....  $\cos 45^\circ$
- $\sin 70^\circ$  .....  $\sin 110^\circ$
- $\cos 70^\circ$  .....  $\cos 110^\circ$
- $\sin 70^\circ$  .....  $\cos 20^\circ$
- $\cos 30^\circ$  .....  $\sin 60^\circ$
- $\cos 120^\circ$  .....  $\cos 150^\circ$
- $\sin 130^\circ$  .....  $\sin 100^\circ$